18.03.2020

Тема занятия: Возрастание и убывание функции

Что необходимо сделать:

1. Составить конспект по параграфу # 49 «Возрастание и убывание функции» (страницы 257 - 260)
2. Разобрать задачу № 1 (на странице 259) и задачу № 2 (на странице 260)
3. Выполнить задания в тетради по математике № 900 (2;4;6;8)

IX
глава

Применение производной к исследованию функций

Теория без практики мертва или бесплодна, практика без теории невозможна или пагубна. Для теории нужны знания, для практики, сверх всего того, и умение.

А. Н. Крылов

§ 49 Возрастание и убывание функции

1. Производная широко используется для исследования функций, т. е. для изучения различных свойств функций. Например, с помощью производной можно находить промежутки возрастания и убывания функции, ее наибольшие и наименьшие значения.

Рассмотрим *применение производной к нахождению промежутков возрастания и убывания функций.*

Пусть значения производной функции $y = f(x)$ положительны на некотором промежутке, т. е. $f'(x) > 0$. Тогда угловой коэффициент касательной $\operatorname{tg} \alpha = f'(x)$ к графику этой функции в каждой точке данного промежутка положителен. Это означает, что касательная к графику функции направлена вверх, и поэтому график функции на этом промежутке «поднимается», т. е. функция $f(x)$ возрастает (рис. 120). Если $f'(x) < 0$ на некотором промежутке, то угловой коэффициент касательной $\operatorname{tg} \alpha = f'(x)$ к графику

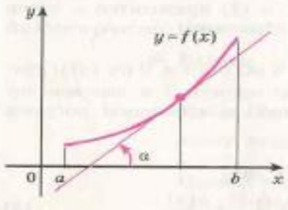

Рис. 120

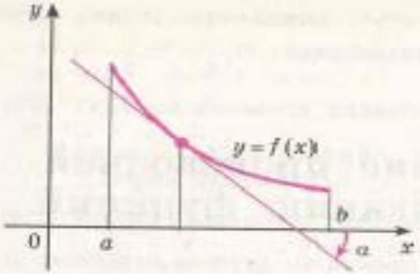

Рис. 121

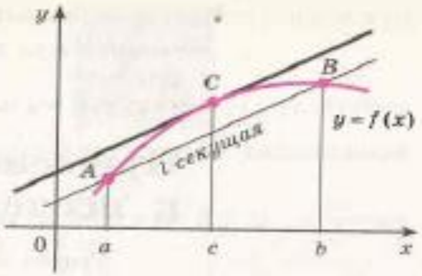

Рис. 122

функции $y = f(x)$ отрицателен. Это означает, что касательная к графику функции направлена вниз, и поэтому график функции на этом промежутке «опускается», т. е. функция $f(x)$ убывает (рис. 121).

Итак, если $f'(x) > 0$ на промежутке, то функция *возрастает* на этом промежутке.
Если $f'(x) < 0$ на промежутке, то функция $f(x)$ *убывает* на этом промежутке.

Строгое доказательство этого утверждения выходит за рамки школьного курса математики.

2. При доказательстве теорем о достаточных условиях возрастания или убывания функции используется теорема 1, которая называется *теоремой Лагранжа.*

Теорема 1. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема на интервале $(a; b)$, то существует точка $c \in (a; b)$ такая, что

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \qquad (1)$$

Доказательство формулы (1) приводится в курсе высшей математики. Поясним геометрический смысл этой формулы.

Проведем через точки $A(a; f(a))$ и $B(b; f(b))$ графика функции $y = f(x)$ прямую l и назовем эту прямую секущей. Угловой коэффициент секущей равен $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Запишем формулу (1) в виде

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \qquad (2)$$

Согласно формуле (2) угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке C с абсциссой c (рис. 122) равен угловому коэффициенту секущей l, т. е. на интервале $(a; b)$ найдется такая точка c, что в точке графика с абсциссой c касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна секущей. Сформулируем и докажем с помощью теоремы Лагранжа *теорему о достаточном условии возрастания функции.*

Теорема 2. Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a; b)$ и $f'(x) > 0$ для всех $x \in (a; b)$, то функция возрастает на интервале $(a; b)$.

● Пусть x_1 и x_2 — произвольные точки интервала $(a; b)$ такие, что $x_1 < x_2$. Применяя к отрезку $[x_1; x_2]$ теорему Лагранжа, получаем

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1), \text{ где } c \in (x_1; x_2).$$

Так как $f'(c) > 0$ и $x_2 - x_1 > 0$, то из последней формулы получим $f(x_2) - f(x_1) > 0$, т. е. $f(x_2) > f(x_1)$. Это означает, что функция $f(x)$ возрастает на интервале $(a; b)$. ○

Таким же способом можно доказать, что если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и $f'(x) > 0$ на интервале $(a; b)$, то эта функция возрастает на отрезке $[a; b]$.

Аналогично доказывается, что функция $f(x)$ убывает на интервале $(a; b)$, если $f'(x) < 0$ на $(a; b)$; если, кроме того, функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она убывает на отрезке $[a; b]$.

Задача 1 Доказать, что функция $f(x) = x + \frac{1}{x}$ возрастает на промежутке $x > 1$.

► Найдем производную: $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$. Если $x > 1$, то $\frac{x^2 - 1}{x^2} > 0$, т. е. $f'(x) > 0$ при $x > 1$, и поэтому данная функция возрастает на промежутке $x > 1$. ◁

Промежутки возрастания и убывания функции часто называют *промежутками монотонности этой функции.*

Задача 2 Найти интервалы монотонности функции
$$f(x) = x^3 - 3x^2.$$

▶ Найдем производную: $f'(x) = 3x^2 - 6x$.

Решая неравенство $f'(x) > 0$, т. е. неравенство $3x^2 - 6x > 0$, находим интервалы возрастания: $x < 0$, $x > 2$.

Решая неравенство $f'(x) < 0$, т. е. неравенство $3x^2 - 6x < 0$, находим интервал убывания $0 < x < 2$. ◁

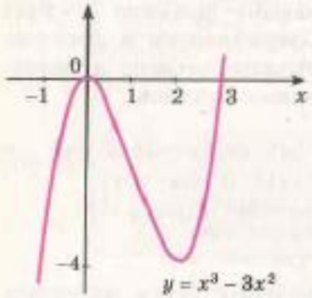

Рис. 123

График функции $y = x^3 - 3x^2$ изображен на рисунке 123. Из этого рисунка видно, что функция $y = x^3 - 3x^2$ возрастает не только на интервалах $x < 0$ и $x > 2$, но и на промежутках $x \leqslant 0$ и $x \geqslant 2$; убывает не только на интервале $0 < x < 2$, но и на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 2$.

Упражнения

899 Доказать, что функция $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$ возрастает на промежутке $x > 1$, убывает на промежутках $x < 0$ и $0 < x < 1$.

900 Найти интервалы возрастания и убывания функции:
1) $y = x^2 - x$; 2) $y = 5x^2 - 3x - 1$;
3) $y = x^2 + 2x$; 4) $y = x^2 + 12x - 100$;
5) $y = x^3 - 3x$; 6) $y = x^4 - 2x^2$;
7) $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 40$; 8) $y = x^3 - 6x^2 + 9$.

901 Построить эскиз графика непрерывной функции $y = f(x)$, определенной на отрезке $[a; b]$, если:
1) $a = 0$, $b = 5$, $f'(x) > 0$ при $0 < x < 5$, $f(1) = 0$, $f(5) = 3$;
2) $a = -1$, $b = 3$, $f'(x) < 0$ при $-1 < x < 3$, $f(0) = 0$, $f(3) = -4$.

Найти интервалы возрастания и убывания функции (902—905).

902 1) $y = \frac{1}{x+2}$; 2) $y = 1 + \frac{2}{x}$; 3) $y = -\sqrt{x-3}$; 4) $y = 1 + 3\sqrt{x-5}$.

903 1) $y = \frac{x^3}{x^2+3}$; 2) $y = \frac{(x-2)(8-x)}{x^2}$;
3) $y = (x-1)e^{3x}$; 4) $y = xe^{-3x}$.

904 1) $y = e^{x^2+3x}$; 2) $y = 3^{x^2-x}$.

905 1) $y = x - \sin 2x$; 2) $y = 3x + 2\cos 3x$.

906 Изобразить эскиз графика непрерывной функции $y = f(x)$, определенной на отрезке $[a; b]$, если:
1) $a = -2$, $b = 6$, $f(-2) = -1$, $f(6) = 5$, $f(3) = 0$, $f'(3) = 0$, $f'(x) > 0$ при $-2 < x < 3$, $f'(x) < 0$ при $3 < x < 6$;
2) $a = -3$, $b = 3$, $f(-3) = -1$, $f(3) = 4$, $f'(2) = 0$, $f'(x) < 0$ при $-3 < x < 2$, $f'(x) > 0$ при $2 < x < 3$.

907 При каких значениях a функция возрастает на всей числовой прямой:
• 1) $y = x^3 - ax$; 2) $y = ax - \sin x$?

908 При каких значениях a функция $y = x^3 - 2x^2 + ax$ возрастает на всей числовой прямой?

909 При каких значениях a функция $y = ax^3 + 3x^2 - 2x + 5$ убывает на всей числовой прямой?

§ 50 Экстремумы функции

На рисунке 123 изображен график функции $y = x^3 - 3x^2$. Рассмотрим *окрестность точки* $x = 0$, т. е. некоторый интервал, содержащий эту точку. Как видно из рисунка, существует такая окрестность точки $x = 0$, что наибольшее значение функция $x^3 - 3x^2$ в этой окрестности принимает в точке $x = 0$. Например, на интервале $(-1; 1)$ наибольшее значение, равное 0, функция принимает в точке $x = 0$. Точку $x = 0$ называют точкой максимума этой функции.

Аналогично точку $x = 2$ называют точкой минимума функции $x^3 - 3x^2$, так как значение функции в этой точке меньше ее значения в любой точке некоторой окрестности точки $x = 2$, например окрестности $(1{,}5; 2{,}5)$.

Точка x_0 называется *точкой максимума функции* $f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.